

# 淺談狹義相對論

## 時空關係

中山大學 物理系  
蔡秀芬 教授

### 大綱

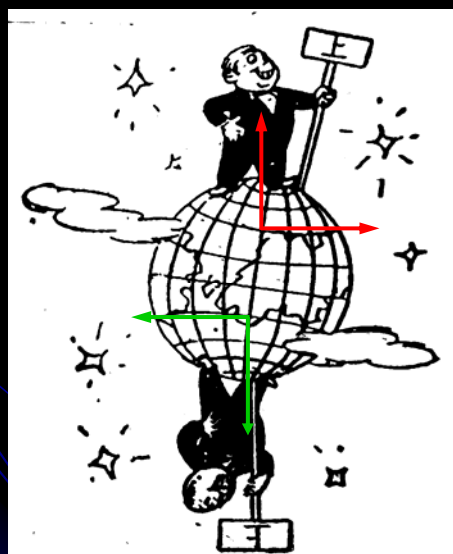
- 發展背景
- 以太是否存在?
- Michelson-Morley 實驗
- Einstein 狹義相對論的兩大基本假設
- 時間膨脹
- 長度收縮
- 速度的合成
- 雙生子矛盾
- 其他

## 亞里士多德的宇宙中心

- 亞里士多德主張地球是一個球形  
—空間各個方向是等價的
- 空間的位置是絕對的，地球的球心就是宇宙的中心—空間點的絕對性

亞里士多德的空間，具有各向同性的性質，但卻不均勻，即空間各點的位置並不是等價的

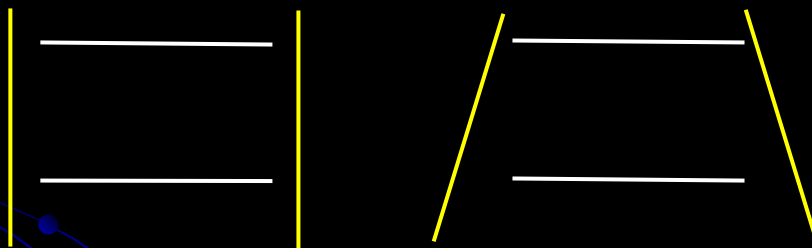
## 空間的相對性



## 牛頓時空觀的相對與絕對

- 哥白尼否定了亞里士多德體系中空間位置的絕對意義
- 伽利烈提出相對性原理
- 牛頓力學中無宇宙中心的地位，任何時空點都是平等的
- 但是在<自然哲學的數學原理>中，牛頓力學仍然引進了絕對靜止的空間和絕對不變的時間這兩個概念

## 長度的相對性



## 速度的相對性

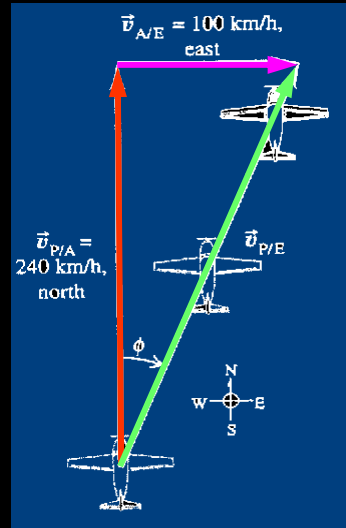
$v_{P/A}$ : 飛機相對於空氣的速度

$v_{A/E}$ : 空氣相對於地球的速度

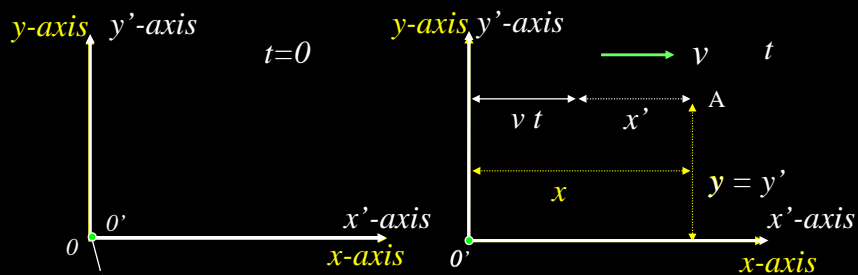
$v_{P/E}$ : 飛機相對於地球的速度

$$\vec{v}_{P/E} = \vec{v}_{P/A} + \vec{v}_{A/E}$$

例如：水中航行的船  
行進中的火車



## Galilean transformation



$$x' = x - vt$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = t$$

$$v_x' = v_x - v$$

$$v_y' = v_y$$

$$v_z' = v_z$$

$$\vec{z}' = \vec{z}$$

$$a' = a$$

## Galilean transformation

1. 相對於慣性參考座標系統(彼此以等速度相對運動的觀察者)而言，對任何動力學現象的描述均是相同的
2. 所有慣性參考座標系統，在動力學上均是等價的
3. 速度是一相對值

## 光速的參考座標系統是什麼？

換句話說：

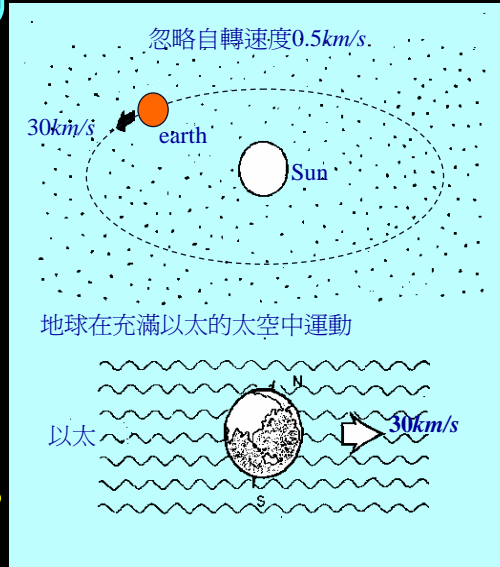
$$C = 3 \times 10^8 \text{ m/sec}$$

是對什麼參考座標系統而言？

## 以太 (ether)

1. 以太充滿於所有空間，無重量，完全彈性，無黏滯性，物體可自由地貫穿其中
2. 光在以太中運動
3.  $3 \times 10^8 \text{ m/s}$  是光相對於以太的速度

質疑：以太是否存在？

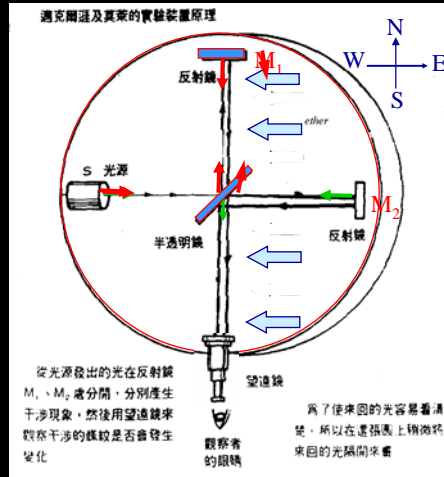
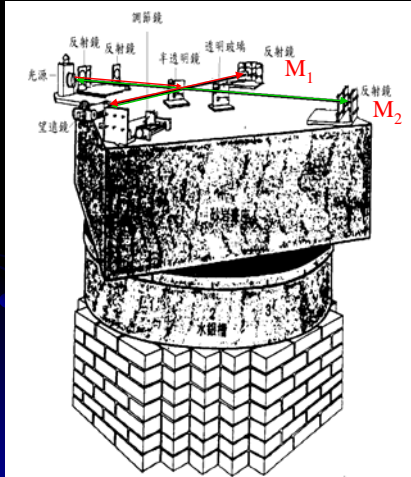


## Michelson-Morley Exp.

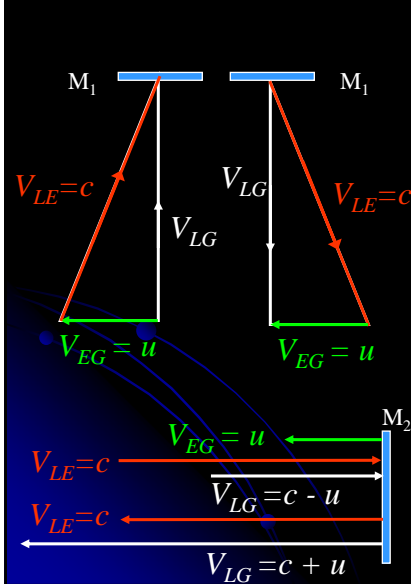
實驗假設：

1. 光相對於ether的行進速度為  $3 \times 10^8 \text{ m/sec}$
2. 地球相對於ether的速度為  $3 \times 10^4 \text{ m/sec}$

# Michelson-Morley Exp.



# Michelson-Morley Exp.



$\vec{V}_{LE}$ : 光相對於以太的速度,  $V_{LE} = c$

$\vec{V}_{LG}$ : 光相對於地球的速度

$\vec{V}_{EG}$ : 以太相對於地球的速度,  $V_{EG} = u$

$$\vec{V}_{LG} = \vec{V}_{LE} + \vec{V}_{EG}$$

對  $M_1$  而言:

$$V_{LG} = (c^2 - u^2)^{1/2}$$

$$t_1 = 2l_1 / (c^2 - u^2)^{1/2} = (2l_1 / c)(1 - u^2/c^2)^{-1/2}$$

對  $M_2$  而言:

$$t_2 = l_2 / (c - u) + l_2 / (c + u)$$

$$= (2l_2 / c)(1 - u^2/c^2)^{-1}$$

## Michelson-Morley Exp.

兩路徑的光行走的時間差  $\Delta$

$$\Delta = t_2 - t_1 = (2l_2/c)(1-u^2/c^2)^{-1/2} - (2l_1/c)(1-u^2/c^2)^{-1/2}$$

當  $u \ll c$  時,

$$\Delta \sim (2l_2/c)(1+u^2/c^2) - (2l_1/c)(1+u^2/c^2)$$

$$= 2(l_2 - l_1)/c + (2u^2/c^3)(l_2 - l_1/2) \dots \text{產生干涉條紋}$$

將整個實驗裝置旋轉  $90^\circ$ , 則時間差為  $\Delta'$

$$\Delta' = 2(l_1 - l_2)/c + (2u^2/c^3)(l_1 - l_2/2)$$

$\Delta'$  與  $\Delta$  的差異導致干涉條紋的移動, 移動的條數為  $\delta$

$$\delta = c(\Delta + \Delta')/\lambda = (l_1 + l_2)u^2/(\lambda c^2)$$

如果  $l_2 = l_1 = l$ ,  $\delta = 2lu^2/(\lambda c^2)$

## Michelson-Morley Exp.

$u = 30 \text{ km/sec}$  (地球公轉速度),  $u/c = 10^{-4} \ll 1$

Michelson exp.  $l = 1.2 \text{ m}$ ,  $\lambda = 6 \times 10^{-7} \text{ m} = 6000 \text{ \AA}$

$$\delta_{\text{cal}} = 0.04$$

實驗結果: ***null results***

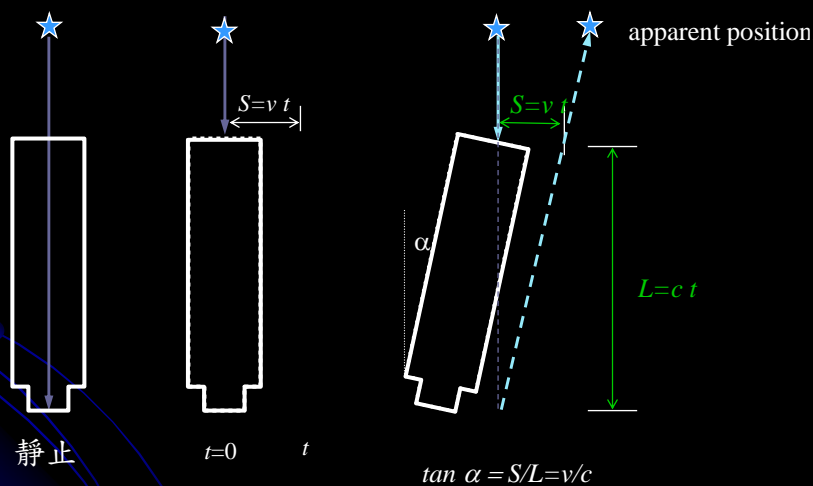
- Michelson & Morley (1887):  $l = 12 \text{ m}$ ,  $\delta_{\text{cal}} = 0.4$ ,  $\delta_{\text{exp}} < 0.005$
- Morley & Miller (1902–1904):  $l = 32.2 \text{ m}$ ,  $\delta_{\text{cal}} = 1.13$ ,  $\delta_{\text{exp}} < 0.015$
- Illingworth (1927):  $l = 2 \text{ m}$ ,  $\delta_{\text{cal}} = 0.07$ ,  $\delta_{\text{exp}} < 0.004$
- Michelson *et al.* (1929):  $l = 25.9 \text{ m}$ ,  $\delta_{\text{cal}} = 0.9$ ,  $\delta_{\text{exp}} < 0.01$
- Joos (1930):  $l = 21 \text{ m}$ ,  $\delta_{\text{cal}} = 0.75$ ,  $\delta_{\text{exp}} < 0.002$



## Ether 是否存在？

- Michelson-Morley Exp. :  
case 1: ether 存在  
地球相對ether是靜止的-地球的地位特殊  
case 2: ether不存在
- 假設ether存在：  
解釋 1: ether 被地球拖著走  
**地球與ether間的磨擦力為何沒有被測量到？**  
質疑：無法解釋**光行差**的現象  
解釋 2: Lorentz Contraction

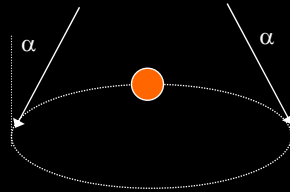
## 光行差 (Aberration of Light)



看不到星光

## 光行差 (Aberration of Light)

- 光行差的現象對均勻直線運動的物體而言，所有的星球均偏差同一方向，故沒有任何信息可得到
- 地球的運動軌道接近圓形，光行差的方向每半年會反轉，故實驗十分容易觀察



結論：地球在光行進的介質(ether)中運動，且彼此有相對運動，ether並沒有被拖著走

## 光行差 (Aberration of Light)

以波動說的觀點：

1. 對於星球的光行差而言
  - 地球與以太間有相對運動
2. 由Michelson-Morley實驗結果
  - 地球與以太間沒有相對運動

## Lorentz contraction

1. Lorentz 接受ether存在的假設
2. Lorentz 認為空間和時間的觀念與組成物質的原子的電力及物質的運動有關  
當時已經知道組成原子是由一正電荷體與電子相吸所組成,而原子結合形成分子及其他巨觀的物體.究其原因所有的物質均是由原子中的正電荷體與電子吸引力及電子間的排斥力達到平衡所構成
3. Lorentz 假設電力是ether的stress與strain所造成的基本態

## Lorentz contraction

From Maxwell's Equations

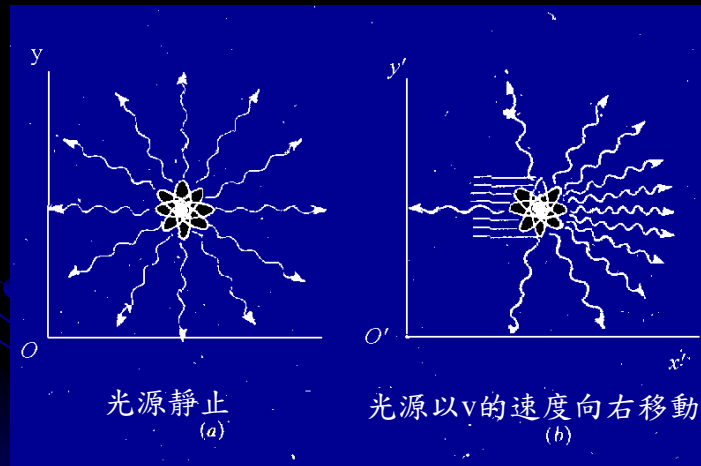
(1) For a particle at rest in the ether

$\phi=q/R$  a spherically symmetric potential

(2) A charged particle moves with a velocity  $v$  through the ether

- no change in the direction perpendicular to the velocity
- length shorten in the direction of motion in the ratio  $(1-v^2/c^2)^{1/2}$

## Emission of Light by moving objects



## Lorentz contraction 結論

一靜止時為  $l_0$  的尺

1. 當觀察者以  $v$  的速度沿著其長度的方向移動，則其長度  $l$  變為

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

2. 與運動方向垂直的長度  $\Rightarrow$  長度不改變

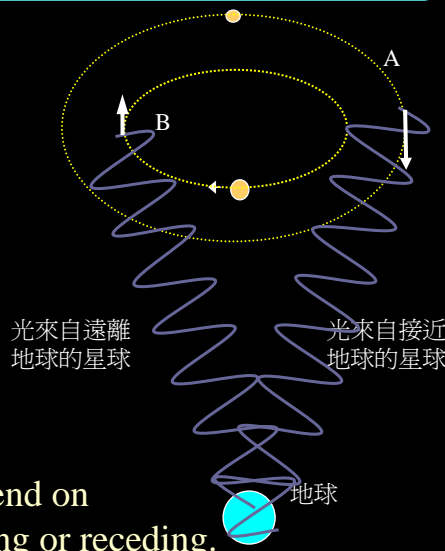
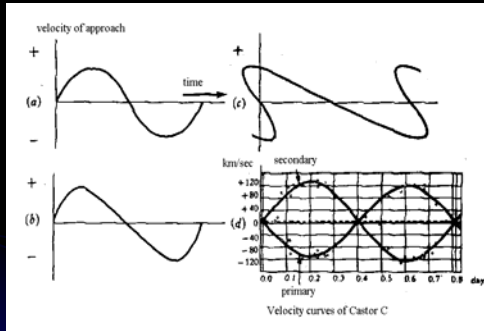
## Einstein 狹義相對論的兩大假設

- 第一假設：  
對於所有的物理定律，在所有的慣性參考座標系統均是等價的
- 第二假設：  
在真空中，光速恆為  $C$ ，不因參考座標系統而異

## Experimental proofs of the 2nd postulate

- We must emphasize that at the time Einstein proposed it, there was **no direct experimental evidence** whatever for the speed of light being independent of speed of its source.
- Einstein postulated it **out of logical necessity**.
- The most nearly direct evidence comes from three sources:
  - (1) **observations of double stars**  
De sitter, *Proc. Amsterdam Accad.*, **16**, 395 (1913)
  - (2) measurement of **the speed of the radiation from the annihilation of rapidly moving positrons**  
*Phy. Rev. Lett.*, **10**, 271 (1963)
  - (3) measurement of **the speed of the photons** from the decay of rapidly moving  $\pi^0$  mesons.  
*Phys. Lett.* **12**, 260 (1964)

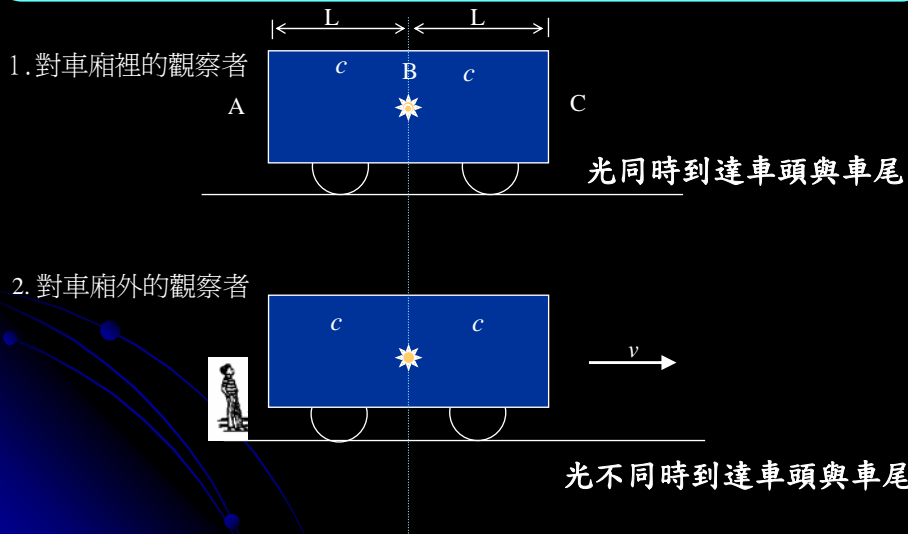
# 雙星互繞



結論:

The speed of light does not depend on whether the source is approaching or receding.

# 同時性 (simultaneity)

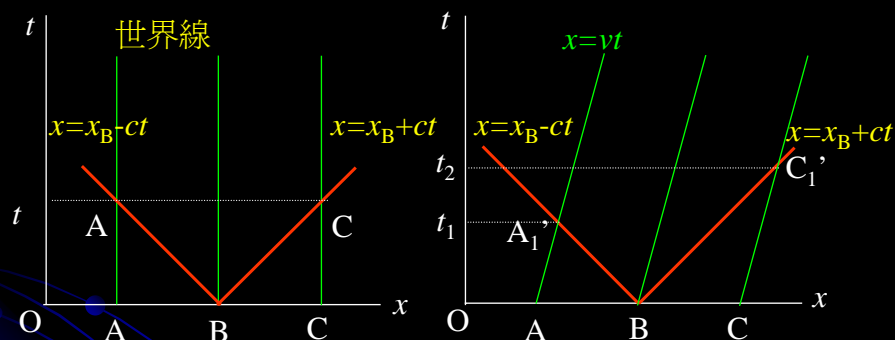


## 同時性 (simultaneity)

觀察者		到達車尾(A)的時間	到達車頭(C)的時間
在車廂內		$L/c$	$L/c$
在車廂外	classical	$(L-vt_1)/(c-v)=t_1$ $t_1=L/c$	$(L+vt_2)/(c+v)=t_2$ $t_2=L/c$
	relativity	$(L'-vt_1)/c=t_1$ $t_1=L'/(c+v)$ $L'=L[1-(v/c)^2]^{1/2}$	$(L'+vt_2)/c=t_2$ $t_2=L'/(c-v)$ $L'=L[1-(v/c)^2]^{1/2}$

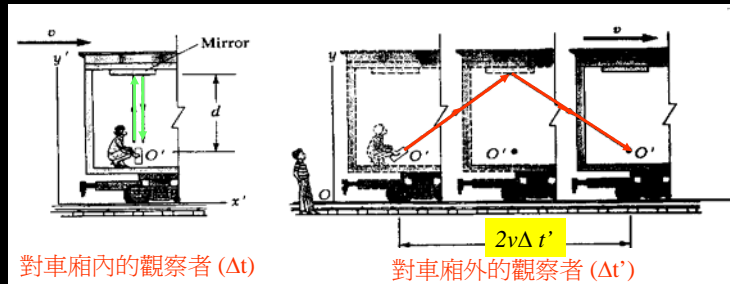
結論：時間的同時性非絕對的，而是依觀察者的參考座標系統而定

## 同時性的相對性



- A、B、C均在S參考系內靜止
- 由B發出光信號
- 信號同時到達A和C
- A、B、C均相對S參考座標系以 $v$ 的速度運動
- 由B發出光信號
- 信號不同時到達A和C

# 時間延遲 (Time dilation)



對車廂內的觀察者 ( $\Delta t$ )

對車廂外的觀察者 ( $\Delta t'$ )

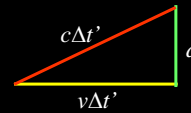
proper time:  $\Delta t = d/c$

improper time:  $\Delta t'$

$$d^2 + (v \Delta t')^2 = (c \Delta t')^2$$

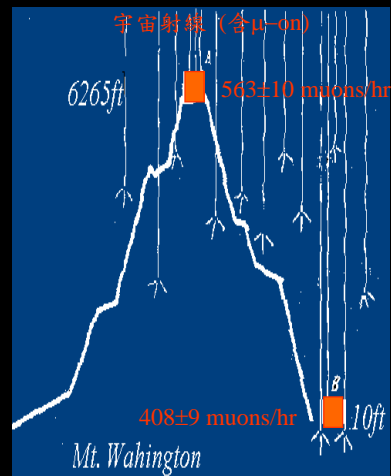
$$(c \Delta t)^2 + (v \Delta t')^2 = (c \Delta t')^2$$

$$\Delta t = \Delta t' [1 - (v/c)^2]^{1/2} \text{ --- time dilation}$$



# Real Exp. on time Dilation

- $m_\mu = 200m_e$
- $\mu \rightarrow e + \nu + \bar{\nu}$
- 半衰期 (half-life):  $\tau_{1/2} = 1.53 \times 10^{-6}$  sec
- $N = N_0 e^{-(t/\tau)}$ ,  $\tau$ : 生命期 (mean-life)
- $\tau = \tau_{1/2} / 0.693 = 2.21 \times 10^{-6}$  sec
- 假設  $v = 0.992 c$
- $T_{im} = (6265 - 10) / 0.992c = 6.4 \times 10^{-6}$  sec
- $408 = 563 e^{-(t/\tau)} \Rightarrow t = 0.7116 \times 10^{-6}$  sec
- $\uparrow$   
 $T_{proper}$
- $T_{proper} / T_{improper} = 0.7116 / 6.4 = 0.11$
- $[1 - (v^2/c^2)]^{1/2} = 0.126$





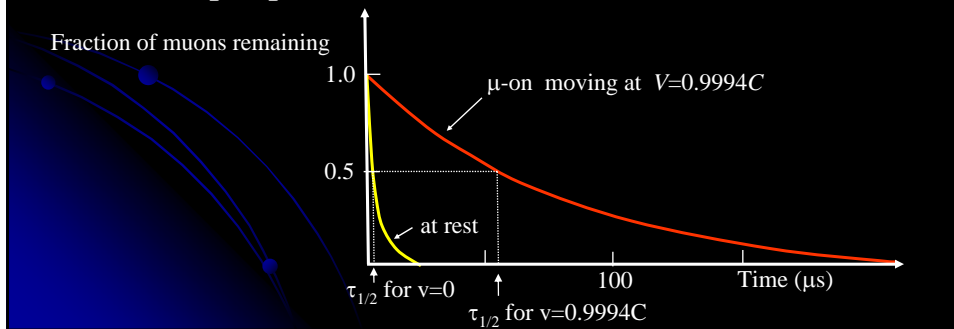
## 生命期 (life time)

$N(t) = N_0 e^{-(t/\tau)}$ ，其中  $\tau$  稱為生命期

當  $N/N_0 = 1/2$  時， $\tau = \tau_{1/2} / \ln(2) = \tau_{1/2} / 0.693$

$\Delta t$  : proper time

$\Delta t'$  : improper time  $\Delta t = \gamma \Delta t'$ ， $\gamma = [1 - (v/c)^2]^{-1/2}$



## 時間延遲 (Time dilation)

$v = 0.992c$

$(1 - v^2/c^2)^{1/2} = 0.1262$

- 以 *time delation* 的觀點

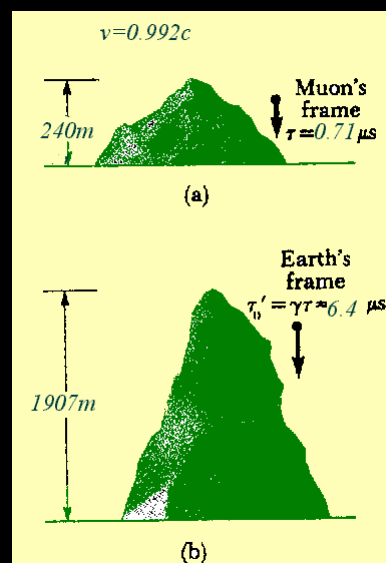
$T_{\text{proper}} = 0.715 \mu\text{sec}$

$T_{\text{improper}} = 6.4 \mu\text{sec}$

- 以 *length constraction* 的觀點

$L_0 = 6255 \text{ ft} = 1907 \text{ m}$

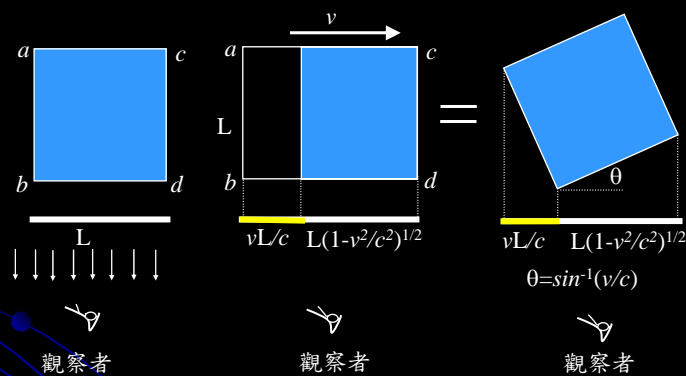
$L = 789 \text{ ft} = 240 \text{ m}$



## 長度收縮 (Length contraction)

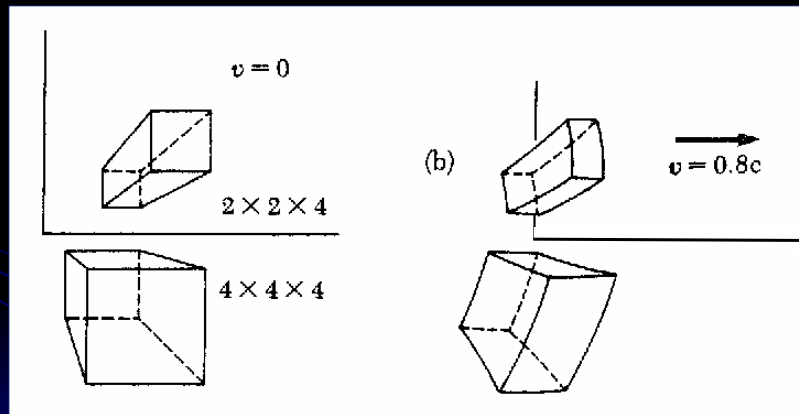
- 一相對於參考座標系是靜止的尺  
 $\Rightarrow$  測量尺的兩端座標差=尺的長度  $L_0$
- 當尺相對於參考座標系運動時  
 $\Rightarrow$  在一特定的時刻，同時對尺的前端與後端拍攝，比較照片上的空間座標差=運動尺的長度  $L$   
 $\Rightarrow L=L_0(1-v^2/c^2)^{1/2}$

## 眼睛所見的長度收縮



當立方體以速度  $v$  運動時，觀察者將看到一個轉動了的立方體，轉動的角度為  $\theta = \sin^{-1}(v/c)$

## 長度收縮 (Length contraction)



## 長度收縮 (Length contraction)

- 長度收縮與時間延長的效應是對稱的
- 如果甲、乙間有相對運動：

甲看乙的尺收縮了，且乙看甲的尺亦會收縮。

該結論顯示空間的大小不是絕對的，而是相對的。

## Lorentz transformation

Lorentz transformation

$$\begin{aligned}x' &= \gamma (x - vt) \\y' &= y \\z' &= z \\t' &= \gamma \left( t - \frac{vx}{c^2} \right) \\ \gamma &= \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1/2}\end{aligned}$$

Galileo transformation

$$\begin{aligned}x' &= x - vt \\y' &= y \\z' &= z \\t' &= t\end{aligned}$$

## 相對速度的合成

$$\begin{aligned}x &= \gamma (x' + vt') & dx &= \gamma (u_x' + v) dt' & u_x' &= dx'/dt' \\y &= y' & dy &= du_y' dt' & u_y' &= dy'/dt' \\z &= z' & dz &= du_z' dt' & u_z' &= dz'/dt' \\t &= \gamma (t' + vx'/c^2) & dt &= \gamma (1 + vu_x'/c^2) dt'\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u_x &= \frac{dx}{dt} = \frac{u_x' + v}{1 + vu_x'/c^2} & u_x' &= \frac{dx'}{dt} = \frac{u_x - v}{1 - vu_x/c^2} \\u_y &= \frac{dy}{dt} = \frac{u_y'/\gamma}{1 + vu_x'/c^2} & u_y' &= \frac{dy'}{dt} = \frac{u_y/\gamma}{1 - vu_x/c^2} \\u_z &= \frac{dz}{dt} = \frac{u_z'/\gamma}{1 + vu_x'/c^2} & u_z' &= \frac{dz'}{dt} = \frac{u_z/\gamma}{1 - vu_x/c^2}\end{aligned}$$

## 相對速度的合成

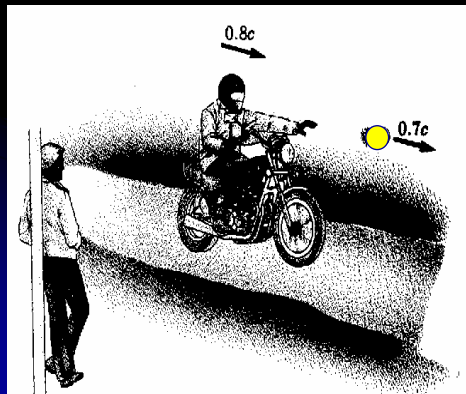
$$\begin{aligned}
 u_x &= \frac{dx}{dt} = \frac{u_x' + v}{1 + vu_x'/c^2} & u_x' &= \frac{dx'}{dt} = \frac{u_x - v}{1 - vu_x/c^2} \\
 u_y &= \frac{dy}{dt} = \frac{u_y'/\gamma}{1 + vu_x'/c^2} & u_y' &= \frac{dy'}{dt} = \frac{u_y/\gamma}{1 - vu_x/c^2} \\
 u_z &= \frac{dz}{dt} = \frac{u_z'/\gamma}{1 + vu_x'/c^2} & u_z' &= \frac{dz'}{dt} = \frac{u_z/\gamma}{1 - vu_x/c^2}
 \end{aligned}$$

當  $u_x \ll c$  ( $u_x' \ll c$ ) 且  $v \ll c \Rightarrow vu_x'/c^2 \ll 1$  ( $vu_x/c^2 \ll 1$ )

$$\left. \begin{aligned}
 u_x &= u_x' + v & u_x' &= u_x - v \\
 u_y &= u_y' & u_y' &= u_y \\
 u_z &= u_z' & u_z' &= u_z
 \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{Galilean transformation}$$

## 相對速度的合成

一機車騎士相對於地面的觀察者而言以  $0.8c$  向右運動，其向前投出一直球，直球相對於騎士的速度為  $0.7c$ ，則直球相對於地面的觀察者速度為何？



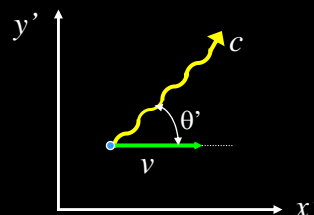
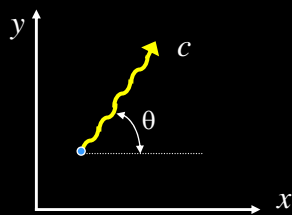
$$\begin{aligned}
 u_x &= \frac{u_x' + v}{1 + vu_x'/c^2} \\
 u_x' &= 0.7c, \quad v = 0.8c \\
 u_x &= \frac{0.7c + 0.8c}{1 + 0.7 \times 0.8} = \frac{1.5c}{1.56} = 0.96c
 \end{aligned}$$

## 光的速率與光源本身的運動無關

$$u_x = \frac{u_x' + v}{1 + vu_x'/c^2}$$

$$u_x' = c \Rightarrow u_x = \frac{c + v}{1 + v/c} = c$$

## 移動物體所發出的光



$$u_x = c \cos \theta$$

$$u_y = c \sin \theta$$

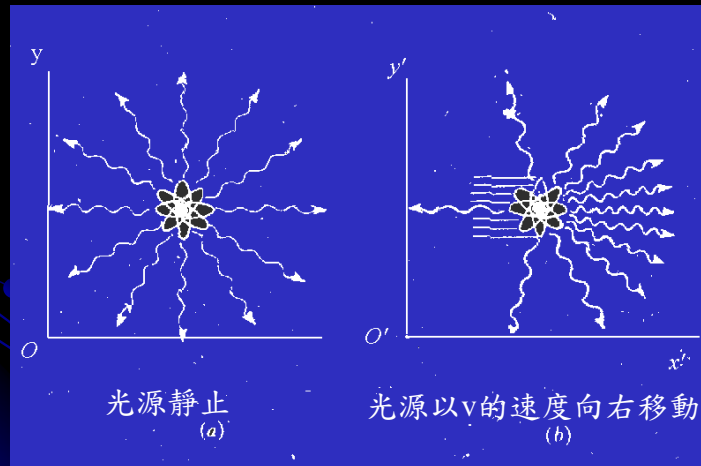
$$u_x' = \frac{c \cos \theta - (-v)}{1 - \frac{(-v)c \cos \theta}{c^2}} = \frac{c \cos \theta + v}{1 + \frac{v \cos \theta}{c}}$$

$$u_y' = \frac{c \sin \theta \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + \frac{v \cos \theta}{c}}, \quad \sin \theta' = \frac{u_y'}{c}$$

$$\tan \theta' = \frac{u_y'}{u_x'} = \frac{\sin \theta \sqrt{1 - v^2/c^2}}{\cos \theta + v/c}$$

$$\theta = 90^\circ \Rightarrow \sin \theta' = \sqrt{1 - v^2/c^2} < 1, \quad \theta' < 90^\circ$$

## Emission of Light by moving objects

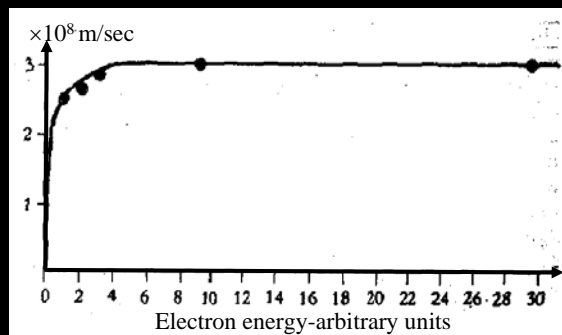


## 極限速度 (The ultimate speed)

- 任何運動物體的運動速度均不會超過光速  
能量傳訊速度的極限是光速
- 因果律必須滿足

$$u_x' = \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}}$$

$$u_x = c \Rightarrow u_x' = c$$



## 加速度 (Acceleration)

$$u_x = \frac{u_x' + v}{1 + \frac{vu_x'}{c^2}}$$

$$u_y = \frac{u_y' / \gamma}{1 + vu_x' / c^2}$$

$$t = \gamma(t' + vx' / c^2)$$

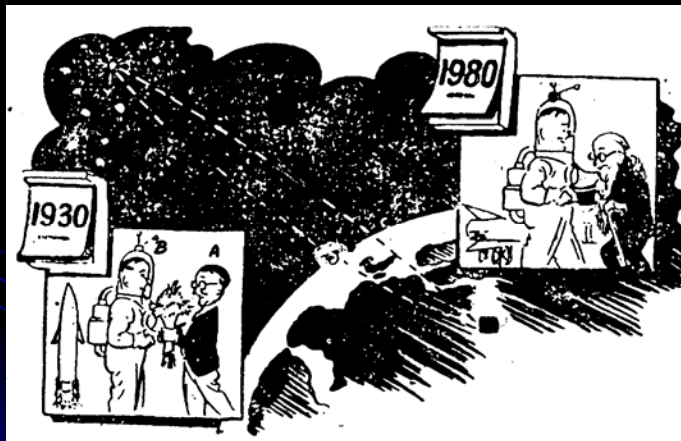
$$a_x = \frac{du_x}{dt} = \frac{du_x' / dt'}{\gamma^3 (1 + vu_x' / c^2)^3} = \frac{a_x'}{\gamma^3 (1 + vu_x' / c^2)^3}$$

$$a_y = \frac{a_y'}{\gamma^2 (1 + vu_x' / c^2)^2} - \frac{(vu_y' / c^2) a_x'}{\gamma^2 (1 + vu_x' / c^2)^3}$$

$$\text{if } a_x' = 0, \text{ or } u_y' = 0 \Rightarrow a_y = \frac{a_y'}{\gamma^2 (1 + vu_x' / c^2)^2}$$

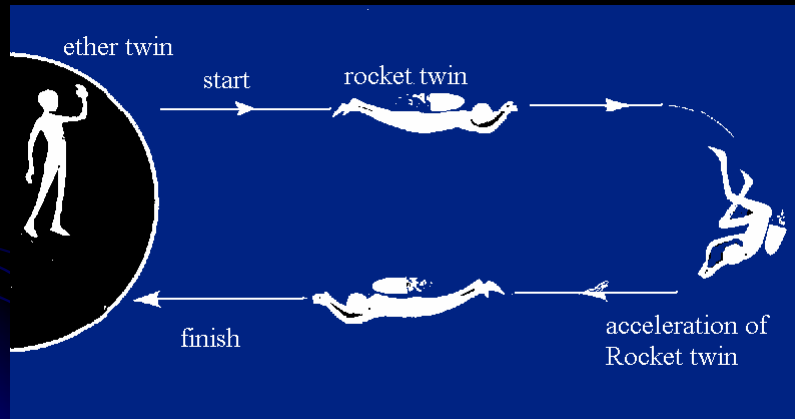
1. 加速度在狹義相對論裡不是轉換不變量, 而且其表示式相當繁雜
2. 在狹義相對論中, 加速度不再像其在牛頓力學中的地位

## 雙生子矛盾 (twin paradox)



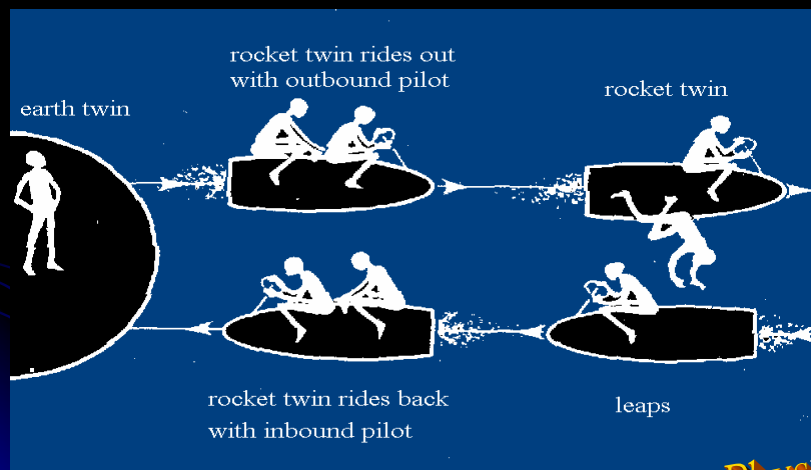


## 雙生子矛盾 (twin paradox)



Physics

## 雙生子矛盾 (twin paradox)



Physics

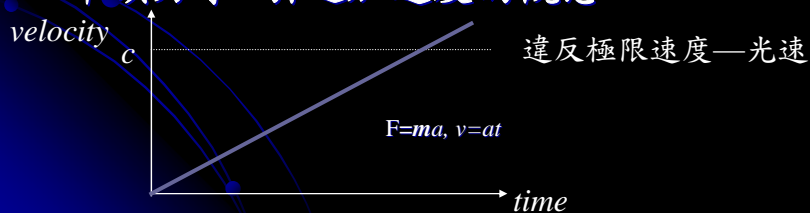
## 雙生子矛盾 (twin paradox)

1. 對太空船上的觀察者：  
去程→加速度過程→回程
2. 對地球上的觀察者：  
無加速度過程

**結論：**整體的旅程對兩個觀察者是不對稱的，故對於在太空船上的觀察者比較年輕的結論，對兩個觀察者而言均可以接受

## 動力學

- 亞里士多德: 力決定物體的運動速度  
力越大，速度越大；力越小，速度越小。  
沒有力時，速度為零
- 伽利略: 慣性定律
- 牛頓力學: 引進加速度的觀念  $F=ma$



## 動量與慣性質量

- 動力學中對彈性碰撞的問題必須遵守

線動量守恆定律

能量守恆定律

mass  $m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$

linear momentum  $\vec{P} = m(v)\vec{v} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$

energy  $E = m(v)c^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$

## 質能互換

(a) 核融合:



${}^7\text{Li}$  (3 protons+4 neutrons): 7.01595 g/mole

${}^1\text{H}$  (single proton): 1.00782 g/mole

${}^4\text{He}$  (2 protons+2 neutrons): 4.00260 g/mole

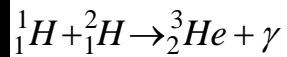
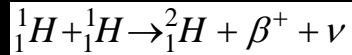
$(7.01595 + 1.00782 - 4.00260 \times 2) = 0.01857$  g/mole

$(0.01857 / 6.0225 \times 10^{23}) \times c^2 = 2.771 \times 10^{-12}$  joules

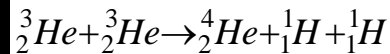
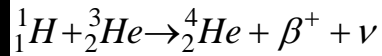
= 17.344 Mev

## 質能互換

proton-proton cycle: 發生在太陽及地球上



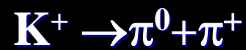
兩者擇一



Four protons combine to form an alpha particle and two positrons with **25 Mev release energy**

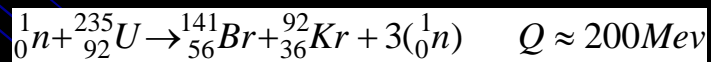
## 質能互換

(b) 核分裂:

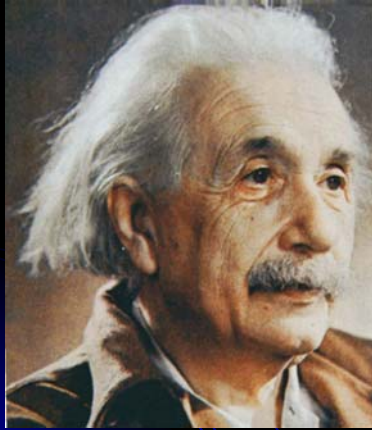


Chain reaction:

自然界  ${}^{235}\text{U}$ : 0.7%,  ${}^{238}\text{U}$ : 99.3%



## Einstein 小史



- 1897 出生於德國南部
- 1896 入蘇黎士技術師範學就讀
- 1900 畢業於蘇黎士技術師範學院
- 1901 作臨時替代教員
- 1902 三級專利審查員(試用)
- 1903 三級專利審查員(正式)
- 1904 昇為正式職員
- 1905 發表陸篇論文:  
博士論文, 布朗運動(2),  
特殊相對論(2), 光電效應

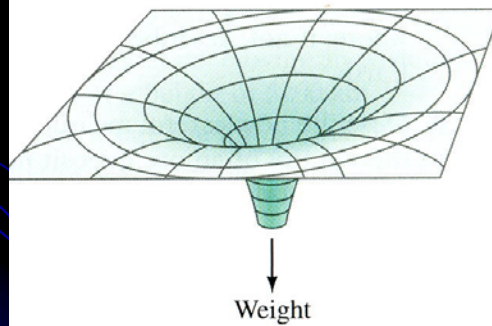
## Einstein 小史

- 1906 二級專利審查員
- 1907 申請伯恩大學博士後研究員未被接受
- 1908 伯恩大學博士後研究員
- 1909 蘇黎士大學副教授
- 1913 普魯士國家科學院士
- 1915 發表廣義相對論
- 1919 在巴西與南非的日全蝕證明了光的偏折現象
- 1921 因光電效應得Nobel Prize
- 1932 往美
- 1952 以色列國會邀請 Einstein回國任總統
- 1955 4 18 與世長辭

Physics

## 彎曲的宇宙

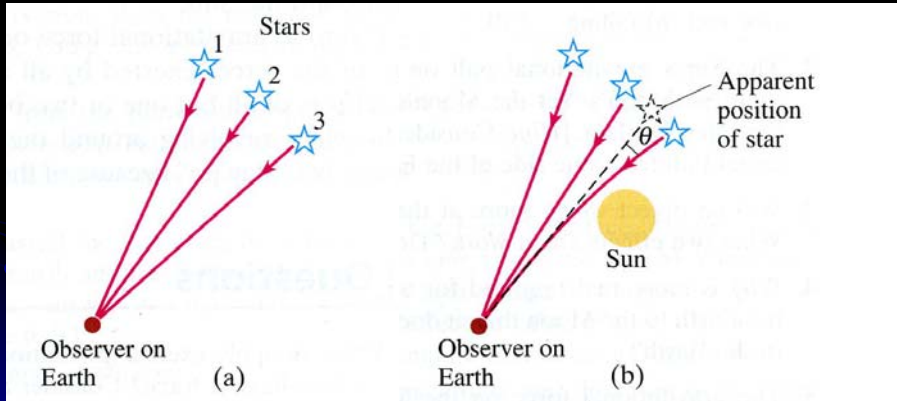
FIGURE 6-20 Rubber sheet analogy for space (technically space-time) curved by matter.



## 地球旋轉扭曲時空 愛因斯坦相對論獲證據

- 依據航空暨太空總署(NASA)暨馬里蘭大學聯合地球系統技術研究中心之科學家在《自然》(Nature)周刊近期撰文，他們觀測了兩顆環繞地球的人造衛星，並發現由於地球的吸引，它們的軌道發生了偏移，即證明愛因斯坦的相對論是正確的。科學家公布當地球自轉時，它確實導致周圍時空的扭曲。越靠近地球，扭曲現象越明顯，依據稍稍脫離軌道的衛星顯示，地球自轉時的確在扭曲時空構造。這是首次直接測量到並證實了愛因斯坦廣義相對論的一個重要層面，旋轉天體會使由三維(度)空間和四維時間構成的時空結構產生扭曲。
- 作者：駐美國代表處科技組
- 現職：駐美國代表處科技組
- 文章來源：駐美國代表處科技組 發佈時間：93.11.17

## 彎曲的光線



## Principle of equivalence (等效原理)

