

國立中山大學通識教育博雅課程跨領域類

古中國科技與文明 數學

程啟正
國立中山大學機械與機電工程學系

中華民國九十五年二月

規與矩

- 《孟子》離婁章句中有云：『離婁之明，公輸子之巧，不以規、矩，不能成方、圓。』
- 《墨子》：『輪匠執其規、矩，以度天下之方、圓。』
- 《淮南子》：『非規矩，不能定方圓；非準繩，不能定平直。』
- 尸佼《尸子》卷下：『古者倕（古代相傳巧人名）為規、矩、準、繩，使天下做焉。』

伏羲執矩女媧執規



山東嘉祥縣武梁祠漢代石室之「伏羲氏手執矩，女媧氏手執規」的造像（約西元150年）

周公六藝

- 禮 - 禮儀制度、道德規範
- 樂 - 音樂、詩歌、舞蹈
- 射 - 射箭
- 御 - 駕車
- 書 - 文字讀寫
- 數 - 算法

十進位制

- 自有文字記載開始，中國的記數法即遵循十進位制
- 甲骨文中已有十進制記數，最大數字為三萬
- 甲骨文中還有「規」、「矩」二字，說明當時已用規矩畫圖

西方的進位制

- 古巴比倫的記數法乃是六十進位制
- 古埃及的數字從一到十只有兩個符號，從一百到一千萬則有四個符號，且均是象形
- 古希臘用全部的希臘字母表示一到一萬的數字
- 現在世界通用的印度阿拉伯數字和十進位計數法是古印度人民創造的，出現在西元六世紀末

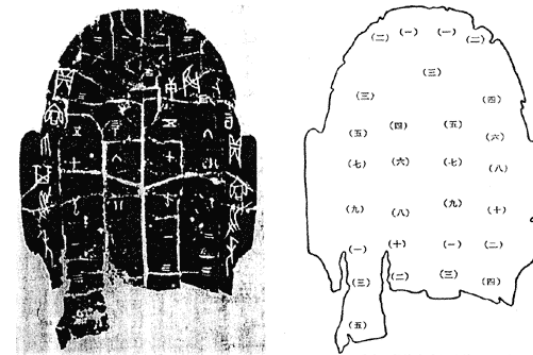
甲骨文的數字



手與結繩

一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	百	千	萬				
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	100	1000	10000				
廿	卅	肆	伍	陸	柒	捌	玖	拾	卅	肆	伍	陸	柒	捌	玖	拾
20	30	50	80	300	600	900	2000	4000	5000	8000	30000					
肆	伍	陸	柒	捌	玖	拾	卅	肆	伍	陸	柒	捌	玖	拾		
3656																

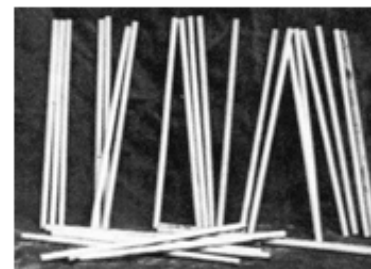
甲骨文的數字



春秋戰國的計算工具 - 算籌

- 商業的發展直接帶動了對於複雜數字計算問題之需求
- 井田制度的廢除，造成各種形狀的私田大量出現，面積與產量計算亦趨複雜
- 曆法需要較複雜的數學計算
- 春秋戰國時期的著作如《禮儀》、《孫子》、《老子》、《法經》、《管子》、《荀子》等均出現『籌』與『算』二字
- 甲骨文與鐘鼎文則未見此二字

西漢骨籌



■ 陝西千陽出土西漢骨籌

1971年八月出土於陝西省千陽縣

算籌

- 最早見於《漢書 律曆志》：「其算法用竹，徑一分(0.23公分)，長六寸(13.8公分)。」
- 宋、元時期以前中國人的主要計算工具
- 根據《隋書 律曆志》記載的算籌，長度縮短，且截面改成方形或扁形
- 用空位表示零
- 負數出現後，算籌分成紅黑兩種，紅籌表示正數，黑籌則表示負數

籌算方法

- 《孫子算經》：「凡算之法，先識其位。一從十橫，百立千僵，千十相望，萬百相當。」

○	九	八	七	六	五	四	三	二	一	籌	埋
空	上	上	上	上	三	三	三	二	一	橫	式
空	三	三	三	三	三	三	三	二	一	直	式

一 三 三 三 1997

三 三 49

三 三 二 3802

三 一 91

珠算盤

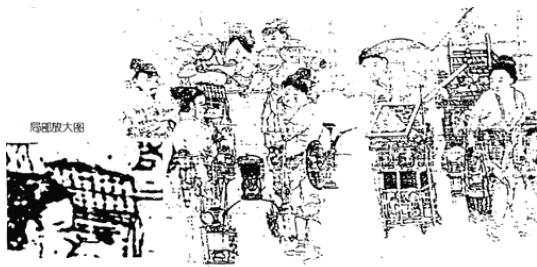
- 由算籌演變而來，元末明初已普遍應用
- 宋代謝察微所著的《算經》中曾提到『算盤』
- 採上二珠下五珠形式
- 明代中期(西元十五世紀)《魯班木經》載明製造珠算盤之規格「算盤式：一尺二寸長，四寸二分大。框六分厚，九分大，……線上二子，一寸一分；線下五子，三寸一分。長短大小，看子而做。」

元代畫中的珠算盤



元代王振鵬繪《貨郎畫軸》(1310年)

南宋畫中的珠算盤



南宋劉勝年繪《茗源賭市圖》

北宋畫中的珠算盤

北宋政和、宣和年間張擇端(1042--1107年)在《清明上河圖》畫卷的最左端，描繪有一家『趙太丞家』的藥鋪，桌子上放著一架算盤，算盤右邊堆著積存的藥方。

珠算盤之重要典籍

- 現在載有算盤圖的最早文獻是明洪武四年刻的《魁本對相四言雜字》一書（1371）
- 現存最早的珠算書是明朝徐心魯訂正的《盤珠算法》（1573）
- 流行最廣，在歷史上起作用最大的珠算書則是明代程大位編的《直指算法統宗》（1592）。

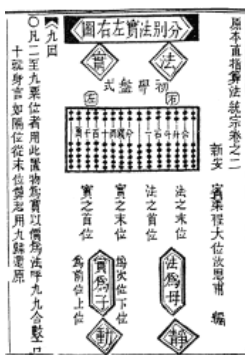
算法統宗

The image shows a page from the book 'Algorithmic Unity' (Algorithmic Unity) with a table of mathematical operations and their methods. The table is organized into columns and rows, listing various mathematical concepts and their corresponding techniques.



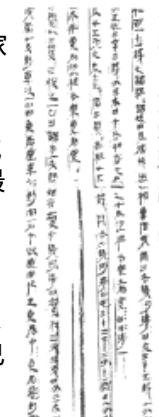
程大位(1533-1606)安徽黃山屯溪區人

算法統宗之珠算盤圖



《算數書》 - 現存最早之數學著作

- 1983年底、1984年初在湖北江陵張家山247號漢墓中出土的一批數學竹簡，有「算數書」三字，因以為名。
- 經過考證，絕大多數內容應是先秦或秦的（西元前二百年），是中國現存最早的數學著作。
- 不分篇章，有69條標題，100餘條抽象的公式，70餘道應用問題及其解法。
- 內容不少重複，也有矛盾之處，並不是一部系統編纂的著作，而是從若干已有的著作中撮編的。



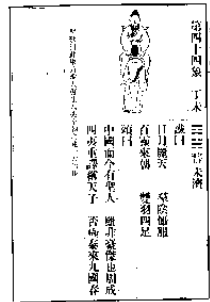
中國古代數學著作

- 《周髀算經》
- 《九章算術》
- 《算經十書》
- 《宋元算書》

《周髀算經》

- 原作者與成書年代已不可考，約西元前一百年的作品
- 現存《周髀算經》為東漢末年趙君卿所注，北周甄鸞重述，唐李淳風注釋
- 是周公詢問商高有關包犧訂立天體經緯的方法，解釋天地高遠深厚的記錄
- 乃「蓋天說」的天文著作

《推背圖》



唐太宗時期袁天罡及李淳風合著預言世事的著作

《周髀算經》

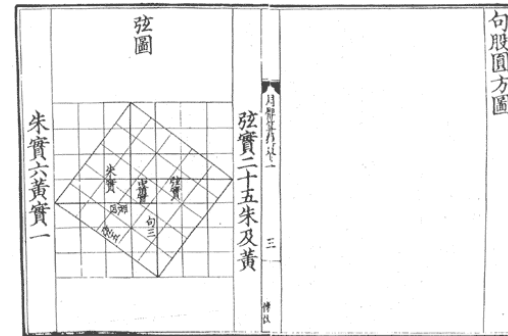


勾股(商周)定理

《周髀算經》

- 「折矩以為句廣三，股修四，徑隅五。」
- 「勾股各自，並而開方除之，得。」

《周髀算經》之勾股圓方圖



《九章算術》

- 原作者與成書年代亦不可考，約西元五十至一百年間的作品。
- 是中國古代數學最重要的經典著作。
- 根據魏晉數學家劉徽之記述，在先秦就有一部以「九數」為主題的《九章算術》，因秦始皇焚書而散壞。西漢張蒼、耿壽昌（西元前一世紀）收集遺殘的舊文，進行刪補而編定成的。現為劉徽注，唐李淳風注釋（約西元三世紀）。
- 分成方田、粟米、衰分、少廣、商功、均輸、盈不足、方程、勾股等九章，包括近百條抽象性術文與246個例題。

《九章算術》目錄

卷九	方田	方田每曰廣縱步數相乘得積步	九章算術	卷一	方田	方田每曰廣縱步數相乘得積步	九章算術
卷八	粟米	此類為田器凡廣縱相乘閉之	卷二	粟米	方田每曰廣縱步數相乘得積步	方田每曰廣縱步數相乘得積步	方田每曰廣縱步數相乘得積步
卷七	均輸	均輸等按經云或定相乘得積步注云廣縱相乘得積步	卷三	衰分	衰分等按經云或定相乘得積步注云廣縱相乘得積步	衰分等按經云或定相乘得積步注云廣縱相乘得積步	衰分等按經云或定相乘得積步注云廣縱相乘得積步
卷六	商功	商功等按經云或定相乘得積步注云廣縱相乘得積步	卷四	少廣	少廣等按經云或定相乘得積步注云廣縱相乘得積步	少廣等按經云或定相乘得積步注云廣縱相乘得積步	少廣等按經云或定相乘得積步注云廣縱相乘得積步
卷五	均輸	均輸等按經云或定相乘得積步注云廣縱相乘得積步	卷五	盈不足	盈不足等按經云或定相乘得積步注云廣縱相乘得積步	盈不足等按經云或定相乘得積步注云廣縱相乘得積步	盈不足等按經云或定相乘得積步注云廣縱相乘得積步
卷四	均輸	均輸等按經云或定相乘得積步注云廣縱相乘得積步	卷六	勾股	勾股等按經云或定相乘得積步注云廣縱相乘得積步	勾股等按經云或定相乘得積步注云廣縱相乘得積步	勾股等按經云或定相乘得積步注云廣縱相乘得積步
卷三	衰分	衰分等按經云或定相乘得積步注云廣縱相乘得積步	卷七	均輸	均輸等按經云或定相乘得積步注云廣縱相乘得積步	均輸等按經云或定相乘得積步注云廣縱相乘得積步	均輸等按經云或定相乘得積步注云廣縱相乘得積步
卷二	粟米	粟米等按經云或定相乘得積步注云廣縱相乘得積步	卷八	粟米	粟米等按經云或定相乘得積步注云廣縱相乘得積步	粟米等按經云或定相乘得積步注云廣縱相乘得積步	粟米等按經云或定相乘得積步注云廣縱相乘得積步
卷一	方田	方田每曰廣縱步數相乘得積步	卷九	方田	方田每曰廣縱步數相乘得積步	方田每曰廣縱步數相乘得積步	方田每曰廣縱步數相乘得積步

古中國的單位

- 長度：一里是三百步，一步是五尺，面積二百四十步是一畝，百畝為一頃
- 容量：一斛（石）是十斗，一斗是十升
- 重量：一石是四鈞，一鈞是三十斤，一斤是十六兩，一兩為二十四銖
- 布疋：一匹等於四丈，一丈是十尺

《九章算術》卷一：方田

- 「以御田疇疆域」，即各種形狀土地的面積計算
- 「今有田，廣三步三分步之一，從五步五分步之二，問為田幾何。答曰十八步。」
- 「今有圓田，周三十步，徑十步，問為田幾何。答曰七十五步。又有圓田，周一百八十一步，徑六十步三分步之一，問為田幾何。答曰十一畝九十步十二分步之一。」

《九章算術》卷二：粟米

- 「以御交質變易」，即各種交易問題的計算
- 「粟米之法：粟率五十，糲米三十，粳米二十七，...」
- 「今有粟一斗，欲為糲米，問得幾何。答曰為糲米六升。今有粟二斗一升，欲為粳米，問得幾何。答曰為粳米一斗一升五十分升之十七。」
- 「今有出錢一百六十，買瓠甓十八枚，問枚幾何。答曰一枚八錢九分錢之六。」

《九章算術》卷三：衰分

- 「以御貴賤稟稅」，即按等差排列分配物料的計算
- 「今有牛、馬、羊食人苗，苗主責之粟五斗，羊主曰：『我羊食半馬。』馬主曰：『食半牛。』今欲衰償之，問各出幾何。答曰牛主出二斗八升七分升之四，馬主出一斗四升七分升之二，羊主出七升七分升之一。」
- 「今有布一匹價值一百二十五。今有布二丈七尺，問得錢幾何。答曰八十四錢八分錢之三。」

《九章算術》卷四：少廣

- 「以御積冪方圖」，即計算各種面積體積
- 「今有田，廣一步半，三分步之一；求田一畝，問從幾何。答曰一百三十步一十一分步之一十。」
- 「今有積一百八十六萬八百六十七尺，問為立方幾何。答曰一百二十三尺。」

《九章算術》卷五：商功

- 「以御功程積實」，即計算工程和體積等問題
- 「今有堤，下廣二丈，上廣八尺，高四尺，袤一十二丈七尺；問積幾何。答曰七千一百一十二尺。」
- 「今有方錐，下方二丈七尺，高二丈九尺；問積幾何。答曰七千四十七尺。」

《九章算術》卷六：均輸

- 「以御遠近勞費」，即計算路程遠近，而使勞力費用平均
- 「今有取傭，負鹽二斛，行一百里，與錢七十。今負鹽一斛七斗三升少半升，行八十里；問與錢幾何。答曰二十七錢十五分錢之十一。」
- 「今有善行者行一百步，不善行者行六十步。今不善行者先行一百步，善行者追之；問幾何步及之。答曰二百五十步。」

《九章算術》卷七：盈不足

- 「以御引雜互見」，即計算複雜的未知數問題
- 「今有共買雞，人出九盈十一，人出六不足十六；問人數、物價幾何。答曰九人、雞價七十。」
- 「今有大器五、小器一，容三斛；大器一、小器五，容二斛；問大小器各容幾何。答曰大器容二十四分斛之十三、小器容二十四分斛之七。」

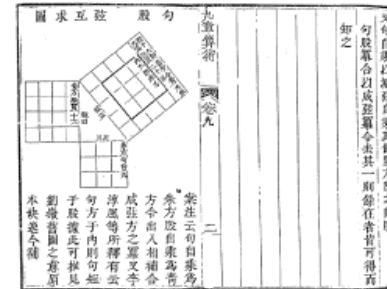
盈不足術再約西元九世紀傳到阿拉伯，被稱為「中國算法」。十三世紀，再傳至西方，備受重視。

《九章算術》卷八：方程

- 「以御錯糴正負」，即計算多元一次方程組
- 「今有五羊、四犬、三雞、二兔，直錢一千四百九十六；四羊、二犬、六雞、三兔，直錢一千一百七十五；三羊、一犬、七雞、五兔，直錢九百五十八；二羊、三犬、五雞、一兔，直錢八百六十一，問羊、犬、雞、兔價各幾何。答曰羊價一百七十七、犬價一百二十一、雞價二十三、兔價二十九。」

《九章算術》卷九：句股

- 「以御高深寬遠」，即各種幾何圖形之面積、體積、長、寬、與高的計算



引葭赴岸

- 「今有池，方一丈，葭升其中央，出水一尺，引葭赴岸，適與岸齊，問水深、葭長各幾何。答曰水深一丈二尺、葭長一丈三尺。」



句股容圓

- 「今有句八步，股十五步，問句中容圓徑幾何。答曰六步。」



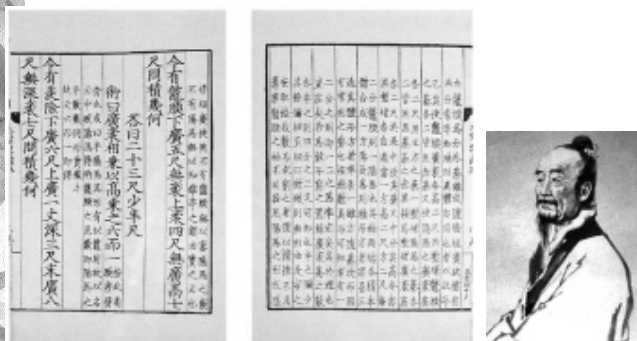
《九章算術》之貢獻

- 世界上最早的分數四則運算法則與比例分配算法。
- 世界上最早的開平方、開立方方法則、一元二次線性方程組解法。
- 完整的勾股公式和解勾股形的方法。
- 世界上第一次記載了負數概念和正負數加減法則。
- 以計算為中心，具有強烈的程序化、機械化特點，理論聯繫實際的風格，構築了中國和東方數學的基本框架，為中國傳統數學領先世界千餘年奠定了基礎。
- 其歷史地位與科學價值，與古希臘歐幾里得之《幾何原本》交相輝映。

《九章算術》之後

- 三國魏陳留王景元四年（西元263年）數學家劉徽著《九章算術注》十卷。後第十卷「重差」，因第一題為測望一海島的高遠而以《海島算經》為名單行，是中國最早的一部測量數學著作，亦為地圖學提供了數學基礎。
- 北宋賈憲《黃帝九章算經細草》（約西元十一世紀），已失傳。
- 南宋景定二年（西元1261年）楊輝著《詳解九章算法》

《九章算術注》



劉徽

圓周率

- 兩漢以前，一般採用的圓周率準則為「周三徑一」，即 $\pi = 3$ 。
- 東漢張衡在《靈憲》中取 $\pi = 730/232 \approx 3.1466$ ，又在求體積公式取 $\pi = 10^{1/2} \approx 3.1622$
- 三國時吳人王蕃在《渾儀論說》中取 $\pi = 142/45 \approx 3.1556$

割圓術之一

- 《九章算術 方田》「術曰：半周半徑相乘得積步。」
- 《九章算術注》「按：半周為從，半徑為廣，故廣從相乘為積步。假令圓徑二尺，圓中容六弧之一面，與圓徑之半，其數均等。合徑率一而弧周率三也。」

圓內接正六邊形邊長 = 半徑 = 1

圓面積 =

之圓而無若而於一之容
率幕裁餘夫不弧之半六
也止徑外可割之兩一從
周以每則之請割之半若東而
三周難算細有則廣徑一為
者徑自不者餘與細四割弧周積
從謂格外與徑圓所因之半率步
其至故出置以向矣而次徑三也
六然以容合而合六以二也

割圓術之二

- 《九章算術注》「又按為圖，以六弧之一面乘一弧半徑，三之，得十二弧之幕。若又割之，次以十二弧之一面乘一弧之半徑，六之，得二十四弧之幕。割之彌細，所失彌少。割之又割，以至於不可割，則與圓周合體而無所失矣。」

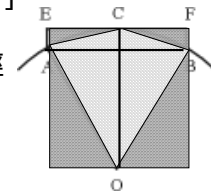
藍色矩形面積 = 正六邊形邊長 × 半徑

$$= 1$$

橘色箏型面積 = 藍色矩形面積 ÷ 2

$$= 0.5$$

正十二邊形面積 = 6 × 橘色箏型面積 = 3 ≈ π



割圓術之三

- 《九章算術注》「割六弧以為十二弧，術曰：置圓徑二尺，半之為一尺，即圓裏弧之面也。令半徑一尺為弦，半面五寸為句，為之求股。以句幕二十五寸減弦幕，餘七十五寸，開方除之下至秒忽，...。以減半徑，...，謂之小句。弧之半面，又謂之小股，為之求弦。...。開方除之，節十二弧之一面也。」

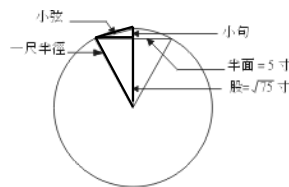
$$\text{股}^2 = \text{半徑}^2 - \text{半面}^2 = 10 \times 10 - 5 \times 5 = 75$$

$$\text{小句} = 10 - \sqrt{75} = 1.3397$$

$$\text{小弦}^2 = \text{小句}^2 + \text{半面}^2$$

$$\text{小弦} = \sqrt{(1.3397)^2 + (5)^2}$$

$$\text{正十二邊形之邊長} = 5.1764$$



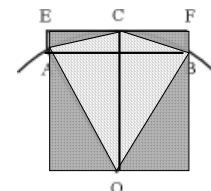
割圓術之四

藍色矩形面積 = 正十二邊形邊長 × 半徑 = 5.1764

橘色箏型面積 = 藍色矩形面積 ÷ 2 = 2.5882

正二十四邊形面積 = 12 × 橘色箏型面積 = 31.0584 寸

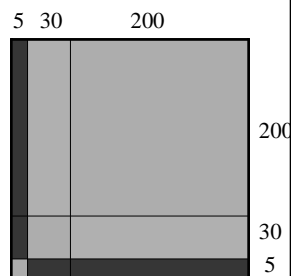
$$\pi \approx 3.10584$$



開方實例

$$\sqrt{55225} = ?$$

- $55225 - (200 \times 200) = 15225$
- $15225 \div (2 \times 200) = 30 \dots$
- $15225 - (2 \times 200 \times 30) - (30 \times 30) = 2325$
- $2325 \div (2 \times 230) = 5 \dots$
- $2325 - (2 \times 230 \times 5) - 5 \times 5 = 0$



$$\sqrt{55225} = 235$$

賈憲三角

- 又稱劉徽三角
- 巴斯卡三角形(西元1654年)：法國科學家巴斯卡(Blaise Pascal)
- 德國阿皮納斯(西元1527年)
- 阿拉伯數學家、天文學家阿爾卡西(Jemshid Alkashi)(西元1427年)

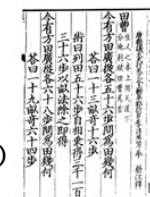


《算經十書》

- 乃指漢唐一千多年間的十部著名數學著作
- 隋唐時國子監算學科的教科書，唐李淳風等整理
- 包括：《周髀算經》、《九章算術》、《海島算經》、《五曹算經》、《孫子算經》、《夏侯陽算經》、《張丘建算經》、《五經算術》、《緝古算經》、與《綴術》等
- 1084年北宋秘書省刊刻十部算經時，《夏侯陽算經》、《綴術》已經亡佚
- 書中所用過的數學名詞，如：分子、分母、開平方、開立方、正、負、方程等，都一直沿用到今天，已有近兩千年的歷史

《五曹算經》

- 傳為北周甄鸞所著(約西元五世紀)
- 「曹」是指古時分科辦事的官署
- 計五卷：田曹(計算田畝面積)、兵曹(軍隊配置以及給養運輸)、集曹(貿易交易)、倉曹(糧食稅收及糧倉容積計算)、金曹(買賣與貨幣處理)。總計有67個問題。
- 很可能是古代官方事物涉及數量時，處理的參考手冊。



《孫子算經》



- 共三卷，作者不詳
- 約成書於西元四、五世紀
- 「今有物不知其數，三三數之剩二，五五數之剩三，七七數之剩二，問物幾何。答曰：二十三。」後被稱為『中國剩餘定理』。西元1801年德國數學家高斯(K.F. Gauss)方提出『餘式定理』。
- 「今有雉兔同籠，上有三十五頭，下有九十四足，問雉兔幾何。答曰：雉二十三、兔一十二。」乃後世『雞兔同籠』問題之始祖，後傳至日本，稱之為『鶴龜算』。

《夏侯陽算經》

- 約成書於西元六世紀。
- 現傳之《夏侯陽算經》三卷，乃北宋元豐七年所刻，作者可能是唐代韓延。應不是原本，而為西元八世紀中的一部實用算術書

《張丘建算經》

- 北魏張丘建著。
- 約是西元五世紀中葉的作品。
- 書中對分數的計算非常強調，序中有云：「夫算學者，不患乘除之為難，而患通分之為難。」
- 『百雞問題』的鼻祖

百雞問題

- 「今有雞翁一值錢五，雞母一值錢三，雞雛三值錢一，凡百錢買雞百隻，問雞翁、母、雛各幾何？」
- 「答曰：雞翁四、母十八、雛七十八；」
- 「又答：雞翁八、母十一、雛八十一；」
- 「又答：雞翁十二、母四、雛八十四。」
- 「術曰：雞翁每增四，雞母每減七，雞雛每益三，即得。」

《五經算術》

- 一般認為是北周甄鸞所撰，但亦有數學史家認為作者不詳，而將甄鸞與唐朝李淳風並列為注釋者。
- 成書年代約在西元 560年
- 內容是對《尚書》、《詩經》、《周易》、《周官》、《禮記》、《論語》等古代經籍，有需要用數學知識或計算技能的地方，做詳細的註解。

《緝古算經》

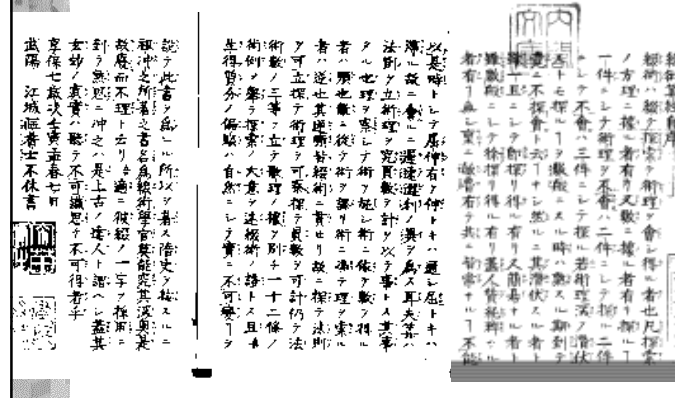
- 隋唐王效通撰。
- 約完成於唐高祖武德八年（西元625年），是《算經十書》成書最晚的一部。
- 包括二十個問題：第一題為計算月亮方位，第二至五題是有關臺、堤與河道的計算，第六至十四題是有關糧倉修築，第十五至二十題則是勾股的三角問題。
- 書中列出正係數一元三次方程式和其解法，是世界最早的三次方程式文獻記載。
- 十三世紀義大利數學家斐波那契(Leonardo Fibonacci)才得出一個三次方程的數值解。而一般三次方程的代數解法到十六世紀才出現於意大利著作。



《綴術》

- 南北朝時代數學家祖冲之與其子祖暅之所寫。
- 約成書於西元五世紀末，曾傳入日本、朝鮮，影響很大，可惜西元十世紀前後即已失傳。
- 南宋寧宗嘉定六年(西元1213年)鮑澣之翻刻十部算經，於杭州七寶山寧壽觀的藏書中找到《數術記遺》，即以其替代了失傳的《綴術》。
- 書中計算出圓周率的值在3.1415926和3.1415927之間，準確到小數第七位。
- 直到十五世紀阿拉伯數學家阿爾卡西(J. Alkashi)和十六世紀法國數學家韋達(F. Viète)才得到更精確的結果，領先世界近一千年。

日本之《綴術算經》



祖冲之

- 祖冲之（西元429-500年）生於南北朝時代南齊范陽薊縣（今河北涿水）。
- 致力於天文曆法之研究。宋孝武帝劉駿大明六年（西元462年）創制『大明曆』，然至其死後十年，即梁武帝蕭衍天監九年（西元462年）方正式頒行。
- 曾改造指南車，並根據諸葛五侯之『木牛流馬』，發明一種稱為『千里船』之水上交通工具，也開發出一種既可舂稻米，又能磨麵粉的『水碓磨』器械。
- 兩項偉大的數學成就：圓周率值以及球體積公式



祖冲之與圓周率

- 《隋書 律曆志》：「圓周率三，圓徑率一，其術疏舛。自劉歆、張衡、劉徽、王蕃、皮延宗之徒各設新率，未臻折衷。... 祖冲之更開密法，以圓徑一億為一丈，圓周盈數三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒七忽，朒數三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒六忽，正數在盈朒二限之間。」

$$3.1415927 > \pi > 3.1415926$$

- 「密率，圓徑一百十三，圓周三百五十五；約率，圓徑七，周二十二。」

$$\pi \approx \frac{22}{7} (\text{約率}) \approx \frac{355}{113} (\text{密率}) \quad \text{祖率}$$

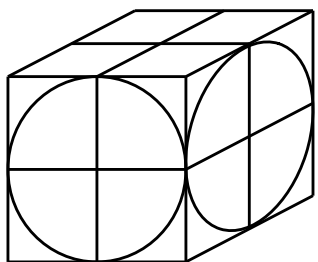
圓周率的發展史

- 西元前四百年：3，埃及
- 西元前二百年：3.14286，希臘歐基里德
- 西元前一百年：「周三徑一」，《周髀算經》
- 西元263年：3.1416，劉徽《九章算術注》
- 西元五世紀末期：3.1415926，祖冲之
- 西元1427年：3.14159265358979325，阿拉伯阿爾卡西(Alkashi)
- 西元1573年：355/113，德國奧圖(Otto)
- 西元1585年：355/113，荷蘭安托尼茲(Anthonisz)
- 西元十六世紀末期：3.1415926536，法國韋達(Viete)

偉大的祖冲之

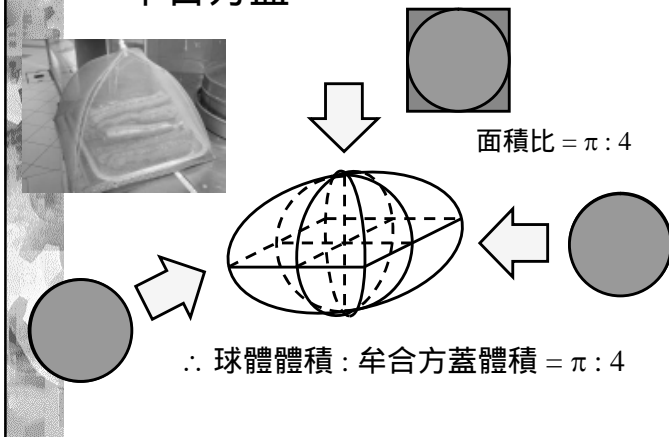


牟合方蓋

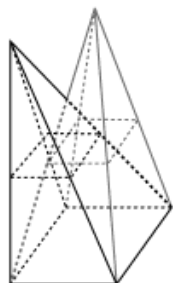


劉徽《九章算術注 少廣》

牟合方蓋

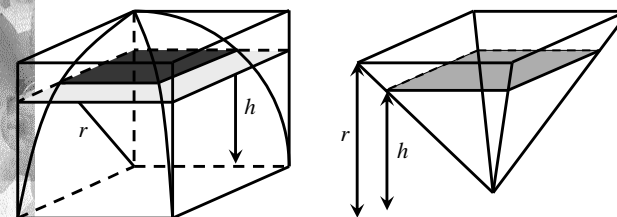


祖暅原理



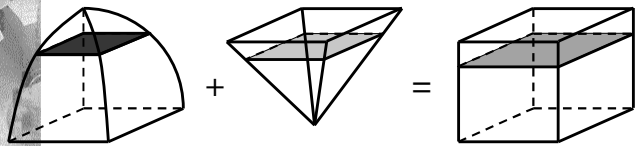
「夫疊成立積，緣冪勢既同，則積不容異」

祖暅原理



紅色面積 = $r^2 - h^2$ 藍色面積 = h^2 = 黃色面積 !
 黃色面積 = $r^2 - (r^2 - h^2) = h^2$

祖暅原理



$$\text{牟合方蓋體積} + \frac{1}{3}r^3 = r^3$$

$$\frac{1}{8} \text{牟合方蓋體積} = \frac{2}{3}r^3$$

祖暅原理

$$\begin{aligned} \therefore \text{牟合方蓋體積} &= 8 \times \frac{2}{3}r^3 \\ &= \frac{16}{3}r^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{因此，球體體積} &= \frac{\pi}{4} \times \frac{16}{3}r^3 \\ &= \frac{4}{3}\pi r^3 \end{aligned}$$

宋元算書

- 南宋秦九韶之《數書九章》（西元1247年）
- 元李治之《測圓海鏡》（西元1248年）與《益古演段》（西元1259年）
- 南宋楊輝之《詳解九章算法》（西元1261年）、《日用算法》（西元1262年）、與《楊輝算法》（西元1274~1275年）
- 元朱世杰的《算學啟蒙》（西元1299年）與《四元玉鑿》（西元1303年）

《數書九章》

- 南宋秦九韶著於西元1247年，共九卷
- 全書分為九大類：大衍類、天時類、田域類、測望類、賦役類、錢谷類、營建類、軍旅類、與市易類。每類九題，凡81題
- 其中對『大衍求一術』（一次同餘組解法）和『正負開方術』（高次方程的數值解法）等有十分深入的研究

大衍求一數



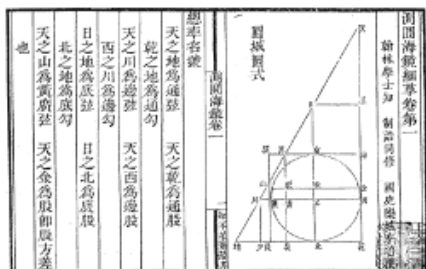
《測圓海鏡》

- 元李治撰於西元1248年，共十二卷
- 李治與秦九韶同時，一北一南，共享盛譽
- 全書共170道問題，集中國傳統數學勾股容圓圖知識之大成，亦是現存最早的「天元術」代表作。



《測圓海鏡》卷一：圓城圖式

- 卷一列出圓城圖式，識別雜記，是全書的理論基礎。圓城圖式是一個圓與十五個勾股形的關係，全書的問題都圍繞著此圖式展開，用天、地、乾、坤等漢字表示點，是個創舉；識別雜記則提出692條公式。



《測圓海鏡》卷二

- 卷二首先提出了本書所有問題的總假設，接著設計了170個問題，216種方法，都是就此圓的直徑提問，求解，因而答案都相同。
- 卷二前十問提出了十種勾股形與圓的關係公式。全書有148問，182種方法是以『天元術』列出一元方程以求解。
- 共列出一次方程31個，二次方程106個，三次方程24個，四次方程20個，六次方程1個，是為現今瞭解解金、元兩代天元術成就的主要的也是最早的著作。

《益古演段》

- 元李治著於西元1259年，凡三卷
- 乃「天元術」的入門教材。



天元術

- 「元」字的左邊乃是一次項的係數
- 有時在常數右旁記一「太」字
- 如係數是負的，則在係數的個位數上加一斜劃



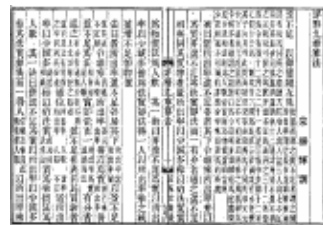
$$2x^3 + 3x^2 + 6 = 0$$



$$4.12x^2 - x + 136 - 248x^{-2} = 0$$

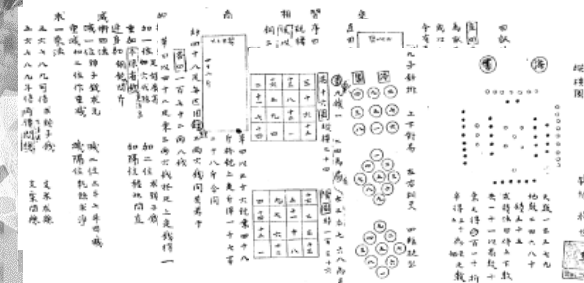
《詳解九章算法》

- 南宋楊輝以北宋賈憲《黃帝九章算經細草》九卷為底本，撰此書於西元1261年
- 打破了《九章算術》的分類格局，而分成乘除、互換、合率、分率、衰分、壘積、盈不足、方程、勾股等九類



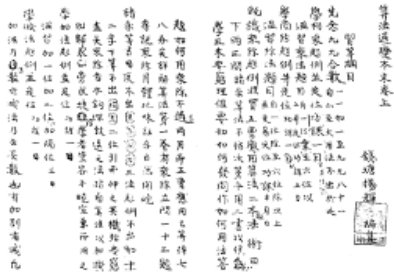
《楊輝算法》

- 乃楊輝三部著作《乘除通變本末》三卷（1274年）、《田畝比類乘除捷法》二卷（1275年）、《續古摘奇算法》二卷（1275年）的合稱



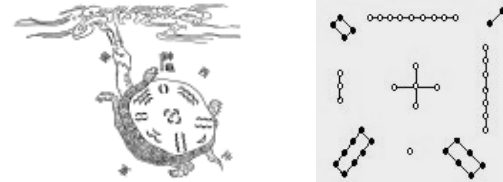
《楊輝算法》之習算綱目

- 《乘除通變本末》卷上的「習算綱目」是一個總括從啟蒙到《九章算術》主要方法的數學教學計劃，在數學教育史上佔有重要地位。



洛書

- 《周易·繫辭》：「河出圖洛出書，聖人則之」
- 涵括數字1至9，相傳為大禹治水時於洛水發現刻於龜背上的圖案。
- 奇數(空心圓)為陽為天，偶數(實心圓)為陰為地。
- 《續古摘奇算法》以縱橫圖稱呼洛書，內容提到『九子斜排，上下對易，左右相更，四維挺出，戴九履一，左三右七，二四為肩，六八為足，五居其中』



縱橫圖、幻方

- 劉輝於《續古摘奇算法》中創「縱橫圖」之名。
- 收入幻方十三個，包括：洛書數（三階幻方）一，花十六圖（四階幻方）二，五五圖（五階幻方）二，六六圖（六階幻方）二，衍數圖（七階幻方）二，易數圖（八階幻方）二，九九圖（九階幻方）一，百子圖（十階幻方）一。
- 另外還有聚五、聚六、聚五、攢九、八陣、連環諸圖，乃是一些呈圓形的數學陣，具有與幻方類似的性質。

百子圖（十階幻方）

1	20	21	40	41	60	61	80	81	100
99	82	79	62	59	42	39	22	19	2
3	18	23	38	43	58	63	78	83	98
97	84	77	64	57	44	37	24	17	4
5	16	25	36	45	56	65	76	85	96
95	86	75	66	55	46	35	26	15	6
14	7	34	27	54	47	74	67	94	87
88	93	68	73	48	53	28	33	8	13
12	9	32	29	52	49	72	69	92	89
91	90	71	70	51	50	31	30	11	10

縱橫斜之和皆為505

四元術

- 用天、地、人、物表示四個未知數
- 常數項居中，右側記一「太」字，天、地、人、物四元分別列於常數項的下、左、右、上，其幕次由與「太」字的距離而決定。

物 ² 地 ²	物 ² 地	物 ²	人物 ²	人 ² 物 ²
物地 ²	物地	物(u)	人物	人 ² 物
地 ²	地(y)	太	人(x)	人 ²
地 ² 天	地天	天(x)	天人	天人 ²
地 ² 天 ²	地天 ²	天 ²	天 ² 人	天 ² 人 ²

\perp
 \equiv
 \parallel

$$2x + 6y + 3z + 7u = 0$$

傲世成就

- 十七世紀英國數學家格列高理 (J. Gregory) 方得到與『招差術』相同之高次內插法的公式。(西元1670年)
- 十八世紀法國數學家貝祖 (E. Bezout) 才系統地敘述了有如『四元術』之高次方程組消元法。(西元1755年)
- 十八世紀瑞士數學家歐拉 (L. Euler) (西元1743年)，十九世紀德國數學家高斯 (C.F. Gauss) (西元1801年) 才陸續獲得與『大衍求一術』相同的定理。
- 十八世紀英國數學家霍納 (W.G. Horner) 方得到與『正負開方術』相同之高次方程的數值解法。