Paired-t test（駢對t檢定）

吳淑娟

統計檢定的基本概念(複習)

- 統計分析（statistical distribution）
  - 基於機率函數原理所形成的分配
- 族群分配（population distributions）
  - 隨機變數所有可能的觀測值所形成的機率分配
- 抽樣分配（sampling distributions）
  - 樣本的機率分配
  - 主要是在推估母族群參數
  - 如樣本平均數的抽樣分配（sample mean distribution）
    - 定義：從母族群分配（μ,σ）中重複抽取無數次的樣本(樣本大小為 n)，計算某一個樣本統計量（如平均數），則無限多個平均數會隨著n 增大而越趨近成一個常態分配，稱之，以N~（$\mu_{\overline{X}}, \sigma^2_{\overline{X}}$)表示。

中央極限定理

- 樣本平均數抽樣分配的平均數等於母族群的平均數
- 平均數抽樣分配的變異數等於母體變異數除以樣本數
  - 變異數與樣本數大小成反比，或標準差與樣本數大小的平方根成反比。

$$\sigma_{\overline{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n} \qquad \text{或} \qquad \sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

- 不論原始母體的形狀是否為常態分配，當樣本數(sample size)夠大時，抽樣分配會趨近於一個常態分配。
- 樣本參數可以根據抽樣分配的機率原理來推估母體的參數，稱為中央極限定理（Central Limit Theorem）。

中央極限定理（Central Limit Theorem）

對於任何一個母體（μ，σ^2），樣本大小為 n 的樣本平均數所形成的分配，當樣本大小 n 趨近無限大時，亦趨近於常態分配（μ，σ^2/n）。

單族群與多族群檢定

- 單族群檢定
  - 一個連續變數的觀測直可以計算出一個平均數。
  - 對於單一變項的平均數加以檢驗，稱為單母族群的平均數檢定。

- 多族群檢定
  - 同時考慮兩種不同情況之下的平均數是否有所差異，牽涉到多個平均數的檢定。
  - 不同的平均數，代表背後具有多個母體的存在，因此被稱為多母體的平均數檢定。
  - 例如男生與女生的平均數的比較。

單尾與雙尾檢定

- 平均數差異檢定在檢驗兩個平均數大於、小於與不等於某一常數等不同形式的擬說假設。形成有特定方向的檢定或無方向性的檢定兩種不同模式。
- 單尾檢定（one-tailed test）
  - 當研究者只關心單一一個方向的比較關係時
  - H_0：$\mu_{x1} = \mu_{x2}$ (此部分包括$\mu_{x1} < \mu_{x2}$)
  - H_a：$\mu_{x1} > \mu_{x2}$ (μ_{x1}與μ_{x2}分別示男生與女生數學成績的平均數)
- 雙尾檢定（two-tailed test）
  - 當研究者並未有特定方向的設定，假設考驗在兩個極端的情況皆有可能發生，而必須設定兩個拒絕區。
  - H_0：$\mu_{x1} = \mu_{x2}$
  - H_a：$\mu_{x1} \neq \mu_{x2}$

獨立樣本與相依樣本

- 不同的平均數可能計算自不同的樣本，亦有可能計算自同一個樣本的同一群人，或是具有配對關係的不同樣本。
- 相依樣本設計 ⟶ Paired-t test
  - 重複量數設計（repeated measure design）：不同的平均數來自於同一個樣本的同一群人重複測量的結果。
  - 配對樣本設計（matched sample design）:不同的平均數來自具有配對關係的不同樣本樣本抽取的機率是為非獨立、相依的情況。因此必須特別考量到重複計數或相配對的機率，運用不同的公式。
- 獨立樣本設計 ⟶ two independent sample t test
  - 不同平均數來自於獨立沒有關連的不同樣本。
  - 根據機率原理，當不同的平均數來自於不同的獨立樣本，兩個樣本的抽樣機率亦相互獨立。

單一樣本平均數檢定

- 當研究者關心某一個連續變項的平均數，是否與某個理論值或母體平均數相符合之時，稱為單母體平均數檢定。
- 當母體的標準差已知，抽樣分配的標準差可依中央極限定理求得，且無違反常態假設之虞，可使用Z分配來進行檢定。
- 若母群的標準差未知，則需使用樣本標準差的無偏估值來推估母體標準差，則使用t分配來進行檢定。

$$Z_{obt} = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma_{\overline{X}}} = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \qquad t_{obt} = \frac{\overline{X} - \mu}{s_{\overline{X}}} = \frac{\overline{X} - \mu}{s / \sqrt{n}}$$

相依樣本的 t 檢定

- 係利用同樣的受試者參加不同實驗處理，又稱為組內法，此法所得量數又稱為「重複量數」(repeated measures)。另有「配對組法」(matched-group method)，亦即以隨機方式找到成對的個體(如雙胞胎)，然後給予每對中的成員不同的處理。
- 其考驗統計量為：

(1)配對組法

- t= $\dfrac{\overline{D}}{S_D/\sqrt{n}}$ ，df=n-1

(2)重複量數

- t= $\dfrac{\overline{X_1}-\overline{X_2}}{\sqrt{\dfrac{S_1^2+S_2^2-2rS_1S_2}{n}}}$ ，df=n-1
- r：兩組測量值的相關係數

t 檢定的基本假設

（一）常態性假設

- 雙樣本平均數檢定中，兩個平均數來自於兩個樣本，除了樣本本身的抽樣分配需為常態化之外，兩個平均數的差的抽樣分配也必須符合常態分配的假設（normality）。

（二）隨機性假設

- 雙樣本平均數檢定中，兩個樣本皆是隨機抽樣所取得。

（三）變異數同質性假設

- 平均數差異檢定中，每一個常態化樣本的平均數要能夠相互比較，除了需符合常態分配假設外，必須具有相似的離散狀況，也就是樣本的變異數必須具有同質性（homogeneity of variance）
- 如果樣本的變異數不同質，表示兩個樣本在平均數差異之外，另外存有差異的來源，致使變異數呈現不同質的情況。變異數同質性假設若不能成立，會使得平均數的比較存有混淆因素。

Paired-t 使用時機

- 使用目的：兩個相依樣本平均數的差異檢定。
- 使用時機：用在一個母體中兩次觀測值平均數的差異比較。
- 說明：比較多種處理方式時，常遇到無法控制的條件，如實驗對象的身高、體重…，不可能控制實驗組與對照組均相同條件，因此為了排除外在差異因素，處理方式常以使用同一樣本作為實驗組與對照組，此樣本又稱成對樣本。

虛無假設 H_0 與對立假設 H_a

- 由於兩樣本為成對樣本，可利用兩樣本均值差異作為計算基礎。
- 雙尾檢定

$$\begin{cases} H_0 : \mu_d = \mu_0 \\ H_a : \mu_d \neq \mu_0 \end{cases}$$

單尾檢定

$$\begin{cases} H_0 : \mu_d = \mu_0 \\ H_a : \mu_d > \mu_0 (\text{或是} \mu_d < \mu_0) \end{cases}$$

檢定公式

- σ 已知：Z檢定

$$Z=\frac{\overline{x_d}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

- σ 未知，小樣本：t 檢定

$$t=\frac{\overline{x_d}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

區間估計公式

- σ 已知：Z檢定

$$\overline{x_d} \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

- σ 未知，小樣本：t 檢定

$$\overline{x_d} \pm t_{\frac{\alpha}{2},df} \frac{s}{\sqrt{n}}$$